TEORÍA DE LA MEDIDA

Aproximación de funciones continuas mediante polinomios

Si g es una función con valores reales y definida sobre un subconjunto de números reales, denotaremos por $g^{(k)}$ a la derivada de orden k de g, en donde $k \in \mathbb{N}$. $g^{(0)}$ representará a la función g misma. Si g está definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, $g^{(k)}(a)$ denotará a la derivada por la derecha de g en el punto a y $g^{(k)}(b)$ denotará a la derivada por la izquierda de g en el punto b.

Proposición 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, nula fuera de un intervalo $(-d, d)$, donde $d > 0$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos las funciones $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{\left(4d^2 - x^2\right)^n}{\int_{-2d}^{2d} (4d^2 - y^2)^n dy} & \text{si } x \in [-2d, 2d] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \rho_n(x - t) dt$$

Entonces f_n converge uniformemente a f en cualquier intervalo $[-c, c]$.

Demostración

Observemos primero que cada función ρ_n es no negativa, continua y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)dx = 1$.

Se tiene $1 - x^2 = (1 - |x|)(1 + |x|) \geq 1 - |x|$ para cualquier $x \in [-1, 1]$, así que:

$$\int_{-2d}^{2d} (4d^2 - x^2)^n dx = 2^{2n} d^{2n} \int_{-2d}^{2d} \left(1 - \frac{x^2}{4d^2}\right)^n dx \geq 2^{2n} d^{2n} \int_{-2d}^{2d} \left(1 - \left|\frac{x}{2d}\right|\right)^n dx$$

$$\geq 2^{2n} d^{2n} \int_0^{2d} \left(1 - \frac{x}{2d}\right)^n dx = \frac{2^{2n} d^{2n}}{n+1}$$

Por lo tanto, para $\delta \in (0, 2d]$ y $x \in [\delta, 2d]$, se tiene:

$$\rho_n(x) = \frac{\left(4d^2 - x^2\right)^n}{\int_{-2d}^{2d} (4d^2 - y^2)^n dy} \leq \frac{\left(4a^2 - \delta^2\right)^n}{\int_{-2d}^{2d} (4d^2 - y^2)^n dy} \leq \frac{n+1}{2^{2n} d^{2n}} \left(4d^2 - \delta^2\right)^n$$

$$= (n+1) \left(1 - \frac{\delta^2}{4d^2}\right)^n$$

Así que ρ_n converge uniformemente a 0 en el intervalo $[\delta, 2d]$.

Sea $c > 0$, entonces f es uniformemente continua en el intervalo $[-c-2d, c+2d]$. Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, 2d)$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier par de puntos $x, y \in [-c-2a, c+2a]$ tales que $|x-y| < \delta$.

Sea M una cota de f.

Como ρ_n converge uniformemente a 0 en el intervalo $[\delta, 2d]$, existe n_0 tal que $\rho_n(x) < \frac{\varepsilon}{8M(2d-\delta)}$ para cualquier $x \in [\delta, 2d]$ y $n \geq n_0$.

Sea $x \in [-c, c]$ y $n \geq n_0$, entonces:

$|f(x) - f_n(x)| = \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho_n(x-t)dt \right|$

$= \left| f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\rho_n(u)du \right|$

$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x-u)]\, \rho_n(u)du \right|$

$= \left| \int_{-2d}^{2d} [f(x) - f(x-u)]\, \rho_n(u)du \right|$

$\leq \int_{-2d}^{-\delta} |f(x) - f(x-u)|\, \rho_n(u)du$

$+ \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-u)|\, \rho_n(u)du$

$+ \int_{\delta}^{2d} |f(x) - f(x-u)|\, \rho_n(u)du$

$\leq 2M \int_{-2d}^{-\delta} \rho_n(u)du + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \rho_n(u)du + 2M \int_{\delta}^{2d} \rho_n(u)du$

$\leq 4M \int_{\delta}^{2d} \rho_n(u)du + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Así que f_n converge uniformemente a f en el intervalo $[-c, c]$.

■

Corolario 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función nula fuera de un intervalo $(-d, d)$, donde $d > 0$, continua y derivable de orden r con derivadas continuas hasta el orden r.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos las funciones $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{\left(4d^2 - x^2\right)^n}{\int_{-2d}^{2d} (4d^2 - y^2)^n dy} & \textit{si } x \in [-2d, 2d] \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho_n(x-t)dt$

Entonces $f_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en cualquier intervalo $[-c, c]$, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$.

Demostración

Para $k \in \{0, \ldots, r\}$, sea $g_{n,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g_{n,k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\rho_n(x-t)dt$$

Por la proposición anterior $g_{n,k}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en cualquier intervalo $[-c, c]$.

Además, tomando $\delta > 0$ arbitraria, se tiene:

$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho_n(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(u)f(x-u)du$

$= \int_{-2d-c}^{2d+c} \rho_n(u)f(x-u)du$

La función $g(u, x) = \rho_n(u)f(x-u)$ es continua en $(-2d-c-\delta, 2d+c+\delta) \times (-c-\delta, c+\delta)$ y derivable en x, hasta el orden r, con derivadas continuas hasta el orden r, para cualquier $x \in (-c-\delta, c+\delta)$, así que, para cualquier $x \in [-c, c]$, se tiene:

$f_n^{(k)}(x) = \int_{-2d-c}^{2d+c} \rho_n(u)f^{(k)}(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(u)f^{(k)}(x-u)du$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\rho_n(x-t)dt = g_{n,k}(x)$

Por lo tanto, $f_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en el intervalo $[-c, c]$.

$\blacksquare$

Corolario 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función nula fuera de un intervalo $(-d, d)$, donde $d > 0$, continua y derivable de orden r con derivadas continuas hasta el orden r. Entonces existe una sucesión de polinomios p_n tales que $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en el intervalo $[-d, d]$, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$.*

Demostración

Consideremos las funciones ρ_n y f_n de la proposición anterior.

Sabemos que, , para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$, $f_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en el intervalo $[-d, d]$.

Además, para $x \in [-d, d]$, se tiene:

$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho_n(x-t)dt = \int_{-d}^{d} f(t)\rho_n(x-t)dt$

$= \frac{1}{\int_{-2d}^{2d}(4d^2-y^2)^n dy} \int_{-d}^{d} f(t) \left[4d^2 - (x-t)^2\right]^n dt = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$

$\blacksquare$

Corolario 3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función nula fuera de un intervalo (a, b), continua y derivable de orden r con derivadas continuas hasta el orden r. Entonces existe una sucesión de polinomios p_n tales que $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en el intervalo $[a, b]$, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$.*

Demostración

Sea $d > 0$ y consideremos la función:

$$g(x) = \tfrac{b-a}{2d} x + \tfrac{a+b}{2}$$

g transforma el intervalo $[-d, d]$ en el intervalo $[a, b]$, así que $f \circ g$ es una función continua que se anula fuera del intervalo $(-d, d)$. Además, para $k \in \{0, \ldots, r\}$, se tiene:

$$(f \circ g)^{(k)} = \left(\tfrac{b-a}{2d}\right)^k \left(f^{(k)} \circ g\right)$$

Así que $f \circ g$ es derivable de orden r y tiene derivadas continuas hasta el orden r.

Por lo tanto, existe una sucesión de polinomios q_n tales que, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$, $q_n^{(k)}$ converge uniformemente a $(f \circ g)^{(k)}$ en el intervalo $[-d, d]$.

Sea $p_n = q_n \circ g^{-1}$, entonces:

$$p_n^{(k)} = \left(\tfrac{2d}{b-a}\right)^k q_n^{(k)} \circ g^{-1}$$

Por lo tanto, $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a:

$$\left(\tfrac{2d}{b-a}\right)^k (f \circ g)^{(k)} \circ g^{-1} = \left(\tfrac{2d}{b-a}\right)^k \left(\tfrac{b-a}{2d}\right)^k \left(f^{(k)} \circ g\right) \circ g = f^{(k)}$$

en el intervalo $[a, b]$.

$\blacksquare$

Corolario 4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable de orden r, con derivadas continuas hasta el orden r. Entonces, existe una sucesión de polinomios p_n tales que $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en el intervalo $[a,b]$, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$.*

Demostración

Tomemos dos puntos c y d de tal forma que $c < a$ y $d > b$, y definamos las funciones $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

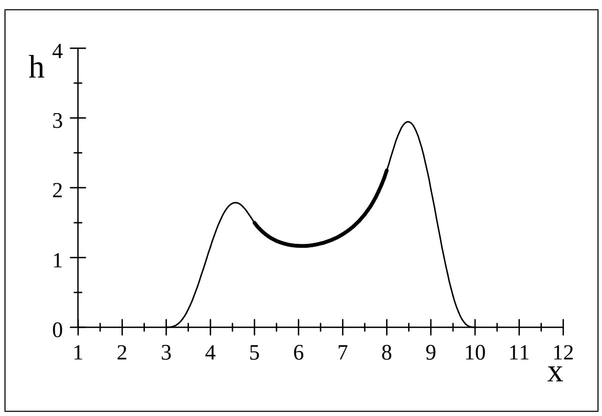
$$g_a(x) = [a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_r(x-a)^r]\,(x-c)^{r+1}$$

$$g_b(x) = [b_0 + b_1(x-b) + \cdots + b_r(x-b)^r]\,(x-d)^{r+1}$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_r$ y $b_0, b_1, \ldots, b_r$ se escogen de tal forma que $g_a^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ y $g_b^{(k)}(b) = f^{(k)}(b)$ para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$.

Definamos ahora la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} g_a(x) & \text{si } x \in [c,a) \\ f(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ g_b(x) & \text{si } x \in (b,d] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



h es continua y derivable de orden r, con derivadas continuas hasta el orden r, y es nula fuera del intervalo (c,d). Por lo tanto, existe una sucesión de polinomios p_n tales que $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a $h^{(k)}$ en el intervalo $[c,d]$, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$. Así que, en particular, $p_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en el intervalo $[a,b]$, para cualquier $k \in \{0, \ldots, r\}$.

■